Tema 0 VECTORES, DERIVADAS, INTEGRALES

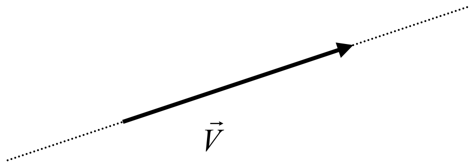
1.- VECTORES. COMPONENTES DE UN VECTOR

Para expresar adecuadamente el valor de una *magnitud vectorial* se requiere, además de su medida, conocer su dirección y sentido. El conocimiento de una fuerza no está completo si decimos que ha sido de 200 N; hay que indicar en qué dirección y sentido ha actuado esa fuerza.

En las operaciones con magnitudes vectoriales se emplean los *vectores.*

Un vector es un *segmento orientado* que se representa gráficamente por una flecha que va desde el punto llamado *origen* al punto llamado *extremo.* La longitud del vector es su *módulo* que ha de ser proporcional a la medida de la cantidad que se representa. La recta a que pertenece nos da la *dirección* y la punta de flecha nos indica *el sentido.*
Por tanto un vector tiene *origen, módulo, dirección y sentido.*

Un vector se simboliza como $\vec{V}$, o en negrita ***V***. El módulo se indica como $|\vec{V}|$.



Consideremos el vector $\vec{V}$ de la fig.a.

Componentes cartesianas o *rectangulares* de un vector son las proyecciones de ese vector sobre los ejes de coordenadas.

$$Vx = x_2 - x_1 \; ; \quad Vy = y_2 - y_1$$

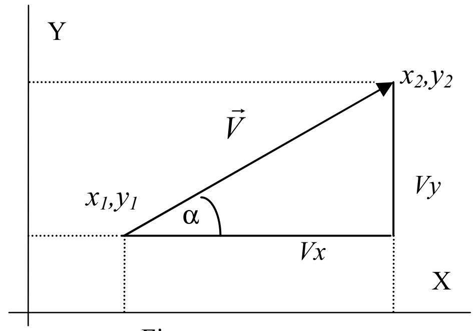


Fig. a

Se puede definir un vector como *un par ordenado de números reales.* Esos números son las componentes del vector, en el orden *x, y*. Se expresa: $\vec{V}$ *(Vx,Vy).*

Un vector libre queda determinado cuando se conoce su módulo, dirección y sentido. Pero también queda determinado cuando se conocen sus componentes.

- Conocidas las componentes de un vector puede calcularse su módulo y dirección:
  $|\vec{V}| = \sqrt{Vx^2 + Vy^2}\;;\; \text{tg}\,\alpha = \dfrac{Vy}{Vx}$

- A partir del módulo y dirección del vector pueden calcularse sus componentes:
  $Vx = |\vec{V}|.\cos\alpha ,\;\; Vy = |\vec{V}|.\text{sen}\,\alpha .$

2.- SUMA Y DIFERENCIA DE VECTORES

Vector suma o *vector resultante* de varios vectores libres es el que tiene por componentes la suma de las componentes correspondientes de los sumandos.
$\vec{A}\,(Ax,Ay)$; $\vec{B}\,(Bx,By)$; $\vec{A}+\vec{B} = (Ax+Bx\ ,\ Ay+By)$

La *regla del paralelogramo* permite hacer la suma gráfica de dos vectores (Fig.b).
Otro modo es aplicar la *regla del triángulo* (Fig.c).

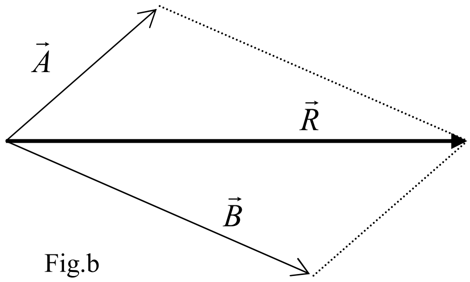


Fig.b

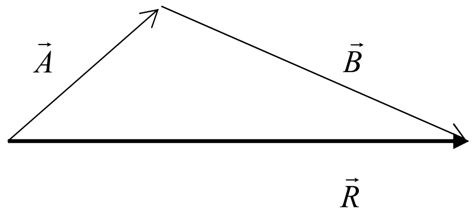


Fig.c

Para sumar varios vectores se aplica una extensión de la regla del triángulo, la *regla del polígono* (Fig.d).

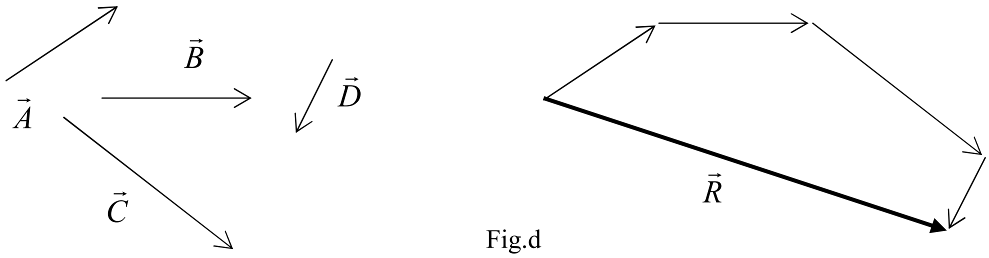


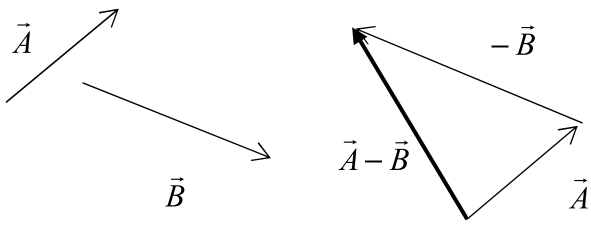
Fig.d

Analíticamente, el módulo de la suma de dos vectores que forman entre sí un ángulo β, se calcula mediante: $\left|\vec{R}\right| = \sqrt{\left|\vec{A}\right|^2 + \left|\vec{B}\right|^2 + 2\left|\vec{A}\right|\cdot\left|\vec{B}\right|\cdot\cos\beta}$

Vector diferencia de dos vectores es el que tiene por componentes la resta de las componentes correspondientes a ambos vectores.
$\vec{A}\,(Ax,Ay)$; $\vec{B}\,(Bx,By)$; $\vec{A}-\vec{B} = (Ax-Bx\ ,\ Ay-By)$

Para restar dos vectores se suma al minuendo el *vector opuesto* al sustraendo. El vector opuesto es el que tiene igual módulo y dirección, pero sentido contrario.
$\vec{A}-\vec{B} = \vec{A}+(-\vec{B})$

Diferencia gráfica
Fig.e



3.- PRODUCTO DE UN NÚMERO POR UN VECTOR.
VECTORES UNITARIOS.

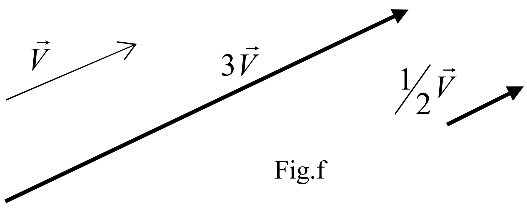


Fig.f

El producto de un número *n* por un vector $\vec{V}$ (Fig.f), es otro vector de la misma dirección y sentido que $\vec{V}$, y cuyo módulo es $n|\vec{V}|$.

Dado un vector $\vec{V}$, se llama *vector unitario* $\vec{u}$, a otro vector de igual dirección y sentido que $\vec{V}$, y cuyo módulo vale 1.

Por tanto: $\vec{V} = |\vec{V}|.\vec{u}$; $\vec{u} = \vec{V} / |\vec{V}|$

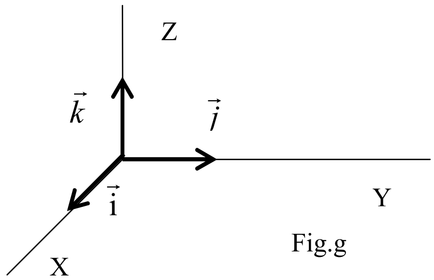


Fig.g

Vectores unitarios fundamentales, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, son vectores de módulo 1, y direcciones de los ejes de coordenadas X,Y,Z, en su sentido positivo. (Fig.g)

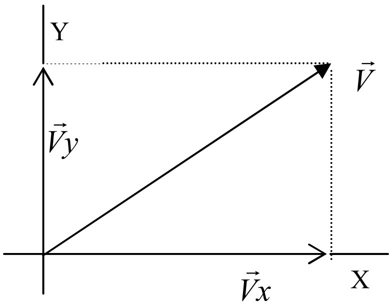


Fig.h

En el plano XY las proyecciones de un vector $\vec{V}$ sobre los ejes se pueden considerar vectores llamados *vectores componentes*: $\vec{V}x, \vec{V}y$. (Fig.h)

$$\vec{V} = \vec{V}x + \vec{V}y \quad \begin{cases} \vec{V}x = |Vx| \cdot \vec{i} \\ \vec{V}y = |Vy| \cdot \vec{j} \end{cases}$$

tomando $Vx = |Vx|$, $Vy = |Vy|$, el vector $\vec{V}$ se expresa: $\vec{V} = Vx \cdot \vec{i} + Vy \cdot \vec{j}$
y su módulo: $|\vec{V}| = \sqrt{Vx^2 + Vy^2}$

En el espacio XYZ, el vector se expresará como $\vec{V} = Vx \cdot \vec{i} + Vy \cdot \vec{j} + Vz \cdot \vec{k}$,
siendo su módulo: $|\vec{V}| = \sqrt{Vx^2 + Vy^2 + Vz^2}$.

4.- PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES

Sean los vectores $\vec{A} = Ax\ \vec{i} + Ay\ \vec{j} + Az\ \vec{k}$; $\vec{B} = Bx\ \vec{i} + By\ \vec{j} + Bz\ \vec{k}$

Se define el producto escalar como: $\vec{A} \bullet \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos\alpha$ *(1)*

Si multiplicamos $\vec{A} \bullet \vec{B} = (Ax\ \vec{i} + Ay\ \vec{j} + Az\ \vec{k}) \bullet (Bx\ \vec{i} + By\ \vec{j} + Bz\ \vec{k}) =$
$Ax\ \vec{i}\ .\ Bx\ \vec{i}\ +\ Ax\ \vec{i}\ .\ By\ \vec{j}\ +\ Ax\ \vec{i}\ .\ Bz\ \vec{k}\ +$
$+\ Ay\ \vec{j}\ .\ Bx\ \vec{i}\ +\ Ay\ \vec{j}\ .\ By\ \vec{j}\ +\ Ay\ \vec{j}\ .\ Bz\ \vec{k}\ +$
$+\ Az\ \vec{k}\ .Bx\ \vec{i} + Az\ \vec{k}\ .\ By\ \vec{j}\ + Az\ \vec{k}\ .\ Bz\ \vec{k}$

Y tenemos en cuenta la definición de producto escalar de dos vectores:
$\vec{i}\ .\vec{i} = \vec{j}\ .\ \vec{j} = \vec{k}\ .\vec{k} = 1.1.\cos 0º = 1$
$\vec{i}\ .\ \vec{j} = \vec{j}\ .\vec{i} = \vec{i}\ .\vec{k} = \vec{k}\ .\vec{i} = \vec{j}\ .\vec{k} = \vec{k}\ .\ \vec{j} = 1.1.\cos 90º = 0$

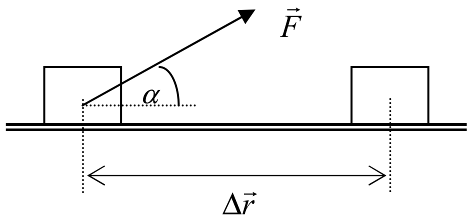
Tendremos: $\vec{A} \bullet \vec{B} = Ax.\ Bx + Ay.\ By + Az.\ Bz$ *(2)*

Igualando las ecuaciones *(1)* y *(2)*: $|\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos\alpha = Ax.\ Bx + Ay.\ By + Az.\ Bz,$

Obtenemos: $\cos\alpha = \dfrac{\mathrm{Ax.Bx + Ay.By + Az.Bz}}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|}$

Expresión que permite calcular el ángulo que forman dos vectores, y de la que se deduce que *el producto escalar de dos vectores perpendiculares es cero*.

<u>Aplicación</u>: El ***trabajo*** es una magnitud escalar que se define en física como el producto escalar del *vector fuerza* $\vec{F}$ por el *vector desplazamiento* $\Delta\vec{r}$.



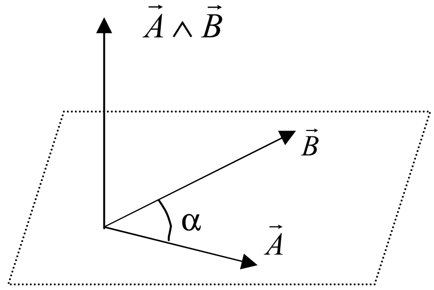
$$W = \vec{F}\ .\ \Delta\vec{r} = |\vec{F}| \cdot |\Delta\vec{r}|\ .\ \cos\alpha$$

Cuando el vector fuerza tiene el mismo sentido que el vector desplazamiento, aumenta la energía cinética del sistema sobre el que se aplica, y decimos que el *trabajo* es *positivo*. Si la fuerza está dirigida en sentido contrario al desplazamiento disminuye la energía cinética del sistema y decimos que el *trabajo* es *negativo*.

5.- PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES

Sean dos vectores $\vec{A} = Ax\ \vec{i} + Ay\ \vec{j} + Az\ \vec{k}$; $\vec{B} = Bx\ \vec{i} + By\ \vec{j} + Bz\ \vec{k}$, que forman entre sí un ángulo α. Su producto vectorial es otro vector que tiene:

- Módulo: $|\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \operatorname{sen}\alpha$
- Dirección: perpendicular al plano que contie-ne a los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$
- Sentido: el de avance de un tornillo al aproxi-mar el vector $\vec{A}$ al $\vec{B}$ por el camino más cor-to. El producto vectorial no es conmutativo.



Aplicando la definición de producto vectorial al producto de vectores unitarios:
$\vec{i} \wedge \vec{i} = 1.1.\operatorname{sen} 0 = 0$, y de igual modo, $\vec{j} \wedge \vec{j} = 0; \vec{k} \wedge \vec{k} = 0$.
Así mismo se cumple que: $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$; $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$; $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$.

Al multiplicar $\vec{A} \wedge \vec{B} = (Ax\ \vec{i} + Ay\ \vec{j} + Az\ \vec{k}) \wedge (Bx\ \vec{i} + By\ \vec{j} + Bz\ \vec{k}) =$
$AxBy\,\vec{k} - AxBz\,\vec{j} - AyBx\,\vec{k} + AyBz\,\vec{i} + AzBx\,\vec{j} - AzBy\,\vec{i} =$

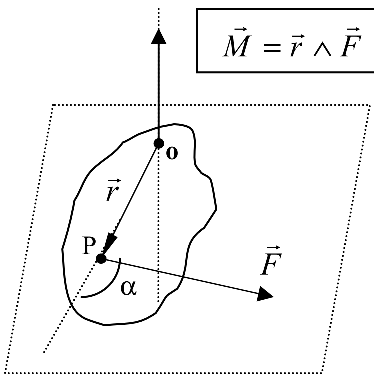
$$= (AyBz - AzBy)\,\vec{i} + (AyBz - AzBy)\,\vec{j} + (AxBy - AyBx)\,\vec{k}$$

que puede expresarse mediante el desarrollo de un *determinante*:

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ Ax & Ay & Az \\ Bx & By & Bz \end{vmatrix}$$

<u>Aplicación</u>: El ***momento de una fuerza*** es una magnitud vectorial que se define como el producto vectorial del *vector de posición* $\vec{r}$ por el *vector fuerza* $\vec{F}$.

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}}$$



Al aplicar una fuerza en el punto P de un cuerpo que pue-de girar alrededor de un punto **o**, se genera un *momento* $\vec{M}$ que hace girar el cuerpo alrededor del eje que pasa por **o**.

El momento creado es un vector cuyo módulo vale:
$|\vec{M}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \operatorname{sen}\alpha$

6.- LA DERIVADA

En una función $y = f(x)$, los valores que adquiere y (variable dependiente), dependen de los valores que tome x (variable independiente).
Si x pasa desde un valor $x = x_0$ a otro $x = x_1$ el incremento será $\Delta x = x_1 - x_0$, con lo que la función $y = f(x)$, se verá incrementada en $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Para estudiar cómo varía la función $y = f(x)$ a medida que va cambiando el valor de la x, calculamos el cociente $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ que nos expresa dicha variación para un incremento dado de x. Pero si ese incremento Δx lo hacemos cada vez más pequeño, conseguiremos conocer dicha variación en el límite en que Δx se hace casi cero, y escribiremos: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{dy}{dx}$

La expresión $\dfrac{dy}{dx}$ es la **derivada de *y* con respecto a *x***.

Propiedades de la derivada

1.- Derivada de la suma de dos funciones: $\dfrac{d(f+g)}{dx} = \dfrac{df}{dx} + \dfrac{dg}{dx}$

2.- Derivada del producto de una constante por una función: $\dfrac{d(k \cdot f)}{dx} = k \cdot \dfrac{df}{dx}$

3.- Derivada del producto de dos funciones: $\dfrac{d(f \cdot g)}{dx} = \dfrac{df}{dx} \cdot g + \dfrac{dg}{dx} \cdot f$

4.- Derivada del cociente de dos funciones: $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{\dfrac{df}{dx} \cdot g - f \cdot \dfrac{dg}{dx}}{g^2}$

5.- Derivada de una función compuesta de dos funciones F(x) = (g ∘ f)(x):
F´= g´(f(x)).f´(x), que se conoce como regla de la cadena.

Derivadas de algunas funciones	$\dfrac{d}{dx} a^x = a^x \cdot \ln a$	$\dfrac{d}{dx} \operatorname{sen} x = \cos x$
$\dfrac{d}{dx} k = 0$	$\dfrac{d}{dx} e^x = e^x$	$\dfrac{d}{dx} \cos x = -\operatorname{sen} x$
$\dfrac{d}{dx} kx^n = knx^{n-1}$	$\dfrac{d}{dx} \ln x = \dfrac{1}{x}$	$\dfrac{d}{dx} \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$

Aplicación: Cálculo de la ***velocidad instantánea*** de un móvil.

Sea un cuerpo que se mueve con velocidad variable en la dirección del eje X según la ecuación $x = 5t^2 + 3t$ *(m)*, y deseamos saber cuál será su velocidad en un instante dado, por ej. $t = 4s$.

Se define *velocidad instantánea V*, como el límite de la velocidad media $\left(V_m = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}\right)$, cuando el intervalo de tiempo se hace casi cero: $\begin{cases} V = \text{lím} \dfrac{\Delta x}{\Delta t} \\ \Delta t \to 0 \end{cases}$

¿Pero cómo calcular ese límite para conocer la velocidad instantánea?

- Tomamos un incremento de tiempo muy pequeño, por ej. $\Delta t = 0{,}001\ s$, y calculamos la posición del móvil en los instantes $t = 4s$ y $t = 4 + 0{,}001s$

$$\left.\begin{array}{l} x \text{ (a los 4 s)} = 5.4^2 + 3.4 = 92\ m \\ x \text{ (a los 4,001 s)} = 5.(4{,}001)^2 + 3.4{,}001 = 92{,}043005\ m \end{array}\right\} \Delta x = 0{,}043005\ m$$

$$V_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0{,}043005}{0{,}001} = 43{,}005\ m/s$$

- Para un intervalo de tiempo más pequeño, $\Delta t = 0{,}0001s \Rightarrow V_m = 43{,}0005$ m/s
- Si reducimos más el intervalo de tiempo, $\Delta t = 0{,}00001s \Rightarrow V_m = 43{,}00005$ m/s

Esos resultados indican que la velocidad media en el límite cuando Δt tiende a cero se va acercando a 43 *m/s*.

Pero ese laborioso método para calcular la velocidad instantánea se simplifica con el uso de la ***derivada***, escribiendo $V = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d(5t^2 + 3t)}{dt} = 10t + 3$
Que para el instante $t = 4s$ da un valor de *velocidad instantánea* de 43 *m/s*.

El vector ***velocidad instantánea*** de un móvil cuya posición en función del tiempo viene dada por $\vec{r} = f(t)$, se expresa como la derivada del vector de posición con respecto al tiempo: $\vec{V} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$.

7.- DERIVADA DE UN VECTOR RESPECTO A UN ESCALAR

El valor de una magnitud vectorial puede depender de una variable independiente, como es el caso de la posición de un móvil que varía respecto al tiempo, o el caso de la intensidad del campo gravitatorio terrestre en un punto que varía respecto a la altura sobre la Tierra de dicho punto.

Si el tiempo *t* es la magnitud escalar de la que depende una magnitud vectorial $\vec{V}$, diremos que $\vec{V}$ es función de *t* y lo expresaremos: $\vec{V} = \vec{V}(t)$. A medida que el tiempo *t* varía, irá cambiando el módulo y/o la dirección de la magnitud $\vec{V}$.

Al incrementar *t* hasta un valor $t + \Delta t$, la magnitud vectorial incrementará su valor hasta $\vec{V} + \Delta\vec{V} = \vec{V}(t + \Delta t)$.

Podemos ahora hallar la diferencia $\Delta\vec{V} = \vec{V}(t + \Delta t) - \vec{V}(t)$, y calcular el valor medio de esa variación en el intervalo de tiempo Δt, $\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{\vec{V}(t + \Delta t) - \vec{V}(t)}{\Delta t}$

Al ir haciendo el intervalo de tiempo Δt tan pequeño que su valor tienda a cero, el cociente $\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$ se irá aproximando a un valor límite que expresamos: $\left\{ \begin{array}{l} \text{lím}\dfrac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} \\ \Delta t \to 0 \end{array} \right.$

Por definición a ese valor límite se le llama derivada de la magnitud vectorial $\vec{V}$ respecto a la magnitud escalar *t*, y se expresa: $\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d\vec{V}}{dt} = \text{lím}\dfrac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} \\ \qquad\quad \Delta t \to 0 \end{array} \right.$

Si el vector $\vec{V}$ viene dado mediante sus componentes $\vec{V} = Vx \cdot \vec{i} + Vy \cdot \vec{j} + Vz \cdot \vec{k}$, y cada una de sus componentes es función del escalar *t*: *Vx = f(t); Vy = f(t); Vz = f(t)*, la derivada de $\vec{V}$ puede expresarse como:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dVx}{dt}\vec{i} + \frac{dVy}{dt}\vec{j} + \frac{dVz}{dt}\vec{k}.$$

La derivada de una magnitud vectorial es otro vector y como tal tendrá su propio módulo, dirección y sentido.

<u>Ejemplo</u>.- Dado el vector $\vec{r} = 3t\,\vec{i} + 4t\,\vec{j}$ m, hallar su derivada respecto al tiempo *t* medido en segundos, y calcular su módulo.

a) $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ m/s; b) módulo = $\sqrt{3^2 + 4^2}$ = 5 m/s

8.- LA INTEGRAL

De una función dada, por ejemplo $f(x) = x^2 + 2x - 1$, se puede calcular la función derivada $f'(x) = 2x + 2$. Decimos que la función $f'(x) = 2x + 2$ es la derivada de $f(x) = x^2 + 2x - 1$, y podremos decir también que la función $f(x) = x^2 + 2x - 1$ es una **primitiva** de $f'(x) = 2x + 2$.
De forma general F(x) es una primitiva de la función f(x) si F'(x) = f(x).

- La derivada de *senx* es *cosx*, por tanto *senx* es una primitiva de *cosx*.
- Una primitiva de $3x^2$ debe ser una función que al ser derivada se obtenga $3x^2$, como por ejemplo la función x^3, o bien la función $x^3 + 1$, o la función $x^3 - 2$.

Eso significa que una función dada tiene muchas primitivas, y por eso:
Si F(x) es una primitiva de f(x), todas las funciones de la forma F(x)+ C, siendo C una constante, son también primitivas de f(x).

El conjunto de todas las primitivas de una función f(x) se llama ***integral*** *de f(x), y se representa como* $\int f(x)dx$ *, pudiéndose escribir que* $\int f(x)dx = F(x) + C$

Propiedades de la integral

1.- La integral de la suma de dos funciones es igual a la suma de las integrales de las funciones: $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
Ej.: $\int (x^2 + x + 1)dx = \int x^2 dx + \int (x+1)dx$, cuyo resultado es $1/3\,x^3 + 1/2\,x^2 + k$

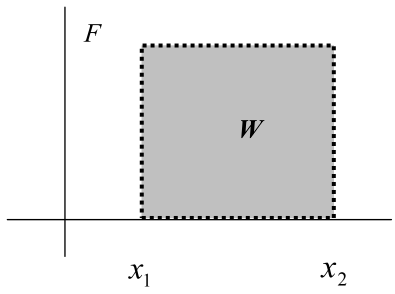
2.- La integral del producto de una función por un número es igual al producto del número por la integral de la función: $\int n\,f(x)\,dx = n\int f(x)dx$
Ej.: $\int 5x^2 dx = 5\int x^2 dx$, cuyo resultado es $5.1/3\,x^3 + k = 5/3\,x^3 + k$

Integrales inmediatas	$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
$\int k\,dx = k\,x + C$	$\int e^x dx = e^x + C$
$\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$
$\int \dfrac{dx}{x} = \ln x + C$	$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$

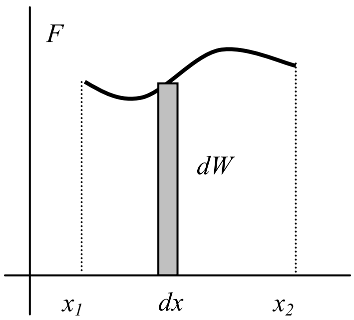
Aplicación: Cálculo del ***trabajo realizado por una fuerza variable***.

Hemos visto que el ***trabajo*** se define como $W = \vec{F}\,.\,\Delta\vec{r}$

Si representamos la fuerza constante en el eje de ordenadas y el desplazamiento entre dos puntos en el eje de abcisas, el área encerrada en el rectángulo es, por definición, el trabajo realizado. $W = F.\Delta x$.



Al calcular por este método gráfico el trabajo realizado por una fuerza variable, obtenemos el trapecio mixtilíneo de la siguiente figura.



¿Cómo se calcula el área de ese trapecio?

Se puede dividir la superficie total en rectángulos como el dibujado, con una base muy pequeña, que represente un desplazamiento infinitesimal *dx*, para el que la fuerza se puede considerar constante, de modo que el área de ese rectángulo será $dW = F.dx$.

El trabajo total realizado por la fuerza variable para el desplazamiento desde x_1 hasta x_2, será la suma de todos esos trabajos infinitesimales.
Esa suma corresponde a una *integral*, que efectuada entre las posiciones x_1 y x_2, se llama ***integral definida***: $W = \int_{x_1}^{x_2} dW = \int_{x_1}^{x_2} F \cdot dx$

De forma más general se dice que *el trabajo realizado por una fuerza variable* $\vec{F}$ *, en un desplazamiento* $\Delta\vec{r}$ *, es igual a la integral definida*:
$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Ejemplo:
¿Qué trabajo se realiza al estirar un muelle 30 cm desde su posición de equilibrio? La constante elástica del muelle es 400 N/m.

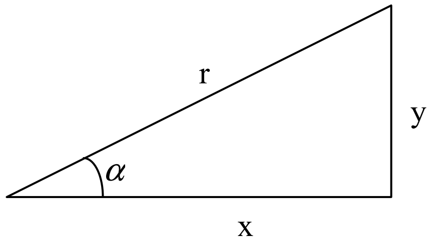
El muelle se estira debido a una fuerza *F* que varía en función del alargamiento *x* del muelle y que según la Ley de Hooke se expresa: $F = k\,.x$

El trabajo será: $W = \int_{x_1}^{x_2} F \cdot dx = \int_{x_1}^{x_2} k \cdot x \cdot dx = \frac{1}{2} k \cdot \left[x^2\right]_{x_1}^{x_2}$

Y con los datos del problema: $W = \frac{1}{2} 400 \cdot \left[x^2\right]_0^{0,3} = \frac{1}{2} 400 \cdot \left(0{,}3^2 - 0^2\right) = 18\,J$

9.- FORMULARIO de TRIGONOMETRÍA

Razones trigonométricas		
$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{r}$	$\cos\alpha = \frac{x}{r}$	$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$
$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$		$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$



Suma y Diferencia de ángulos	
$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$	$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$	$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$
$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$	$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$

Ángulo Doble		
$\operatorname{sen}2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$	$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$	$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

Ángulo Mitad		
$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$	$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$	$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

Transformaciones de sumas en productos	
$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$	$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
$\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$	$\cos\alpha - \cos\beta = -2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

Problemas

1.- Sean los vectores: $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$; $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$; $\vec{c}=3\vec{i}+3\vec{j}-5\vec{k}$, calcular:

1) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$
2) $\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}$
3) $\vec{a}\cdot\vec{b}$
4) $\vec{a}\wedge\vec{b}$
5) El valor del ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$
6) El valor de *m* para que el vector $-2\vec{i}+m\vec{j}+2\vec{k}$ sea perpendicular al vector $\vec{a}$
7) Un vector paralelo al vector $\vec{a}$ y cuyo módulo sea tres veces mayor
8) El vector unitario del vector $\vec{c}$
9) La dirección del vector $\vec{a}$
10) $\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$

2.- Un vector tiene por componentes (2,3,1). Calcular su módulo y su dirección (cosenos directores).

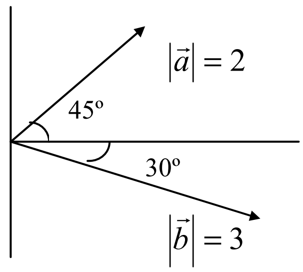
3.- Hallar las componentes de un vector de módulo 8 que se apoya en al plano XY, y forma un ángulo de 30º con el eje OY.

4.- Una caja es empujada sobre el suelo por una fuerza de 20 kp que forma un ángulo de 30º con la horizontal. Calcular las componentes rectangulares de dicha fuerza.

5.- Dados los vectores $\vec{a}=2\vec{i}+4\vec{j}+6\vec{k}$ y $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$, determinar el módulo y la dirección de la suma de ambos vectores.

6.- Se aplican a un cuerpo tres fuerzas coplanarias: a) 80 N formando un ángulo de 30º con la horizontal, b) 60 N y un ángulo de 150º con la horizontal, y c) 25 N y un ángulo de 180º. Hallar el módulo y la dirección de la resultante de dichas fuerzas.

7.- Para los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ indicados en la figura, calcular:
a) $\vec{a}+\vec{b}$ b) $\vec{b}-\vec{a}$ c) $2\vec{b}-\vec{a}$ d) $3\vec{a}+4\vec{b}$



8.- Un avión vuela orientado hacia el norte con una velocidad de 800 km/h, soplando un viento del oeste de 200 km/h. Calcular el módulo y la dirección de la velocidad del avión respecto a tierra.

9.- La velocidad de las aguas de un río de 600 m de anchura es de 90 m/min.

a) ¿Qué tiempo mínimo tardará en cruzar el río un bote cuya velocidad, en agua en reposo, es de 150 m/min? ¿Qué distancia es arrastrado el bote aguas abajo?

b) ¿Hacia qué punto de la orilla opuesta deberá apuntar el bote si quiere cruzar el río perpendicularmente? ¿Qué tiempo tardará ahora en cruzar el río?

10.- Calcula el producto escalar de los vectores $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ y $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$, y el ángulo que forman.

11.- Dados los vectores $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$; $\vec{b} = -2\vec{i} + 4\vec{k}$; $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, comprobar que $\vec{a} \cdot \vec{c} = -1$; $\vec{b} \cdot \vec{c} = 2$.

12.- ¿Para qué valores de *m* los vectores $2\vec{i} + m\vec{j} + 3\vec{k}$ y $m\vec{i} - m\vec{j} + \vec{k}$ son perpendiculares?

13.- Hallar el producto vectorial de los vectores $\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ y $2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Idem de los vectores $2\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$ y $\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

14.- Dados los vectores (-1,3,4) y (6,0,-3), calcular el ángulo que forma su suma con su producto vectorial.

15.- Si $\vec{a}$,$\vec{b}$ y $\vec{c}$ representan las tres aristas de un paralelepípedo, ¿qué representará el producto $\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$?

16.- Calcula el momento lineal de una partícula de 5 kg de masa que posee una velocidad $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ m/s.

17.- Calcula el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}(2,0,-3)$ N cuando su punto de aplicación se desplaza desde el punto (1,2,-3) m hasta el punto (2,6,-1) m.

18.- La fuerza $\vec{F} = 2\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k}$ N está aplicada en el punto *P*(1,-1,2). Hallar el momento de la fuerza respecto a) al origen *O*(0,0,0); b) al punto *Q*(0,3,-2).

19.- El vector de posición de una partícula viene dado por:

$\vec{r} = (3 + 2t - t^3)\vec{i} + (-2 + t + t^2)\vec{j} + (1 - t^2 + t^3)\vec{k}$ m. Calcular:

a) El vector de posición, el vector velocidad y el vector aceleración a los 3 segundos.

b) El módulo de esos tres vectores.

20.- Dado el vector de posición de un móvil $\vec{r} = t^2\vec{i} + 2t^2\vec{j} + t^3k$ m, calcular las componentes intrínsecas de la aceleración en *t* = 2s.

21.- El vector de posición de una partícula móvil viene dado, en función del tiempo, por $\vec{r} = \operatorname{sen} 2t\vec{i} + \cos 2t\vec{j} + 4\vec{k}$ m. Hallar la velocidad y la aceleración de la partícula en cualquier instante.

22.- La velocidad de un móvil con movimiento rectilíneo está definida por la función *v(t)* = 2 + 3t. Calcular el espacio que recorre el móvil entre $t = 0$ s y $t = 5$ s.

23.- Una fuerza $\vec{F} = 3t\vec{i} + 4t\vec{j}$ N actúa sobre un cuerpo de 2 kg de masa inicialmente en reposo.

a) ¿Qué tipo de movimiento posee el cuerpo?
b) Escribir las expresiones del vector aceleración y del vector velocidad en cualquier instante.
c) ¿Cuánto valen los módulos de la fuerza, la aceleración y la velocidad a los 3 s de iniciado el movimiento?

24.- Un cuerpo de 20 kg que se mueve a través del eje OY según la ecuación $\vec{r} = (t^2 - 3)\vec{j}$ m, se ve sometido a la acción de la fuerza $\vec{F} = (4t^3 - 8t)\vec{j}$ N. Hallar el trabajo realizado por la citada fuerza

a) Entre los instantes t = 2s y t =3 s
b) Al desplazarse el cuerpo desde el punto (0,6) hasta el punto (0,13).

25.- La velocidad de un cuerpo viene dada por $\vec{v} = 3t\vec{i} + (4t^2 - 1)\vec{j}$ m/s. Calcular su posición y su aceleración en cualquier instante, sabiendo que parte del reposo desde el punto (3,1,0) m.

Soluciones

1. 1) $6\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$; 2) $-4\vec{i}-9\vec{j}+20\vec{k}$; 3) 3 ; 4) $-5\vec{i}+5\vec{j}+5\vec{k}$; 5) 70,9º ; 6) 2
   7) $3\vec{i}-6\vec{j}+9\vec{k}$; 8) $0{,}46\vec{i}+0{,}46\vec{j}-0{,}76\vec{k}$; 9) α = 74,5º, β = 122,3º, χ = 36,7º; 10) -25
2. 3,74; cosα = 0,534 cosβ = 0,802 cosχ = 0,267
3. (4; 6,9; 0)
4. F_x = 17,3 kp; F_y = 10 kp
5. 11,22; α = 74,5º β = 57,7º χ = 36,7º
6. 70,4 N; 96,3º
7. (4,01;-0,09) ; (1,18;-2,91) ; (3,78;-4,41) ; (14,63;-1,76)
8. 824,62 km/h ; 76º
9. a) 4 min; 360 m b) 37º aguas arriba (450 m); 5 min
10. -7; 107,7º
11. ---
12. -1 y 3
13. $5\vec{i}-5\vec{j}-5\vec{k}$; 0
14. 90º
15. volumen
16. $10\vec{i}+15\vec{j}-5\vec{k}$ kg m/s
17. - 4 J
18. a) $9\vec{i}+5\vec{j}-2\vec{k}$ N m b) $20\vec{i}+9\vec{j}+4\vec{k}$ N m
19. a) $\vec{r}=-18\vec{i}+10\vec{j}+19\vec{k}$ m; $\vec{v}=-25\vec{i}+7\vec{j}+21\vec{k}$ m/s, $\vec{a}=-18\vec{i}+2\vec{j}+16\vec{k}$ m/s^2

b) 28,02 m; 33,39 m/s; 24,17 m/s^2

20. a_t = 12,3 m/s^2 a_n =3,6 m/s^2
21. $\vec{v}=2\cos 2t\vec{i}-2\,\mathrm{sen}\,2t\vec{j}$ m/s; $\vec{a}=-4\,\mathrm{sen}\,2t\vec{i}-4\cos 2t\vec{j}$ m/s^2
22. 47,5 m
23. b) $\vec{a}=\frac{3}{2}t\vec{i}+2t\vec{j}$ j m/s^2; $\vec{v}=\frac{3}{4}t^2\vec{i}+t^2\vec{j}$ m/s c) 15 N; 7,5 m/s^2; 11,2 m/s
24. a) 236,3 J b) 1.052,3 J
25. $\vec{r}=\left(\frac{3t^2}{2}+3\right)\vec{i}+\left(\frac{4t^3}{3}-t+1\right)\vec{j}$ m; $\vec{a}=3\vec{i}+8t\vec{j}$ m/s^2