

MAGNITUDES ESCALARES Y VECTORIALES

Dr. CARLOS MOSQUERA

Magnitudes escalares y vectoriales – Definiciones; propiedades y operaciones

En los conceptos de mecánica que desarrollaremos, nos encontraremos con dos diferentes tipos de magnitudes: **escalares** y **vectoriales**.

Las **magnitudes escalares** son aquellas que quedan totalmente determinadas dando un **sólo** número real y una unidad de medida. Ejemplos de este tipo de magnitud son la longitud de un hilo, la masa de un cuerpo o el tiempo transcurrido entre dos sucesos. Se las puede representar mediante **segmentos** tomados sobre una recta a partir de un origen y de longitud igual al número real que indica su medida. Otros ejemplos de magnitudes escalares son la densidad; el volumen; el trabajo mecánico; la potencia; la temperatura.

A las **magnitudes vectoriales** no se las puede determinar completamente mediante un número real y una unidad de medida. Por ejemplo, para dar la velocidad de un móvil en un punto del espacio, además de su intensidad se debe indicar la dirección del movimiento (dada por la recta tangente a la trayectoria en cada punto) y el sentido de movimiento en esa dirección (dado por las dos posibles orientaciones de la recta). Al igual que con la velocidad ocurre con las fuerzas: sus efectos dependen no sólo de la intensidad sino también de las direcciones y sentidos en que actúan. Otros ejemplos de magnitudes vectoriales son la aceleración; el momentum o cantidad de movimiento; el momentum angular. Para representarlas hay que tomar **segmentos orientados**, o sea, segmentos de recta cada uno de ellos determinado entre dos puntos extremos dados en un cierto orden.

Definición 1: Se llama **vector** a todo segmento orientado. El primero de los puntos que lo determinan se llama **origen** y el segundo **extremo** del vector. La recta que contiene al vector determina la **dirección** del mismo y la orientación sobre la recta, definida por el origen y el extremo del vector, determina su **sentido**.

En la figura 1 se representa el vector **a** sobre la recta *r*, de origen O y extremo P. En adelante los vectores serán designados con letras mayúsculas o minúsculas en negrita.

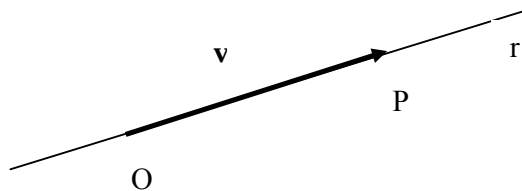


Figura 1

Definición 2: Se denomina **módulo** de un vector a la longitud del segmento orientado que lo define.

El módulo de un vector es **siempre un número positivo**. Será representado mediante la letra sin negrita o como vector entre barras: $\text{mód } \mathbf{v} = v = |\mathbf{v}|$.

Definición 3: Dos vectores son **iguales** (llamados **equipolentes** por algunos autores) cuando tienen el mismo módulo y la misma dirección y sentido.

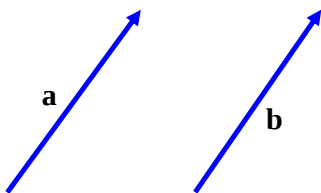


Figura 2

En figura 2 es $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. Esta definición corresponde a lo que se denominan **vectores libres**; o sea, vectores que pueden deslizarse a lo largo de una recta y desplazarse paralelamente a sí mismos en el espacio. Son los que nos interesan y cumplen con las tres propiedades (reflexiva, simétrica y transitiva) que se exigen a toda definición de equivalencia entre elementos de un conjunto.

Componentes de un vector

Para ubicar un objeto cualquiera ya sea que esté en reposo o en movimiento rectilíneo, por lo general utilizamos como referencia un punto fijo sobre la recta. Para ubicar un cuerpo en reposo en un plano o describiendo una trayectoria plana, nos basta con dar su distancia a dos rectas fijas del plano (perpendiculares entre sí para mayor facilidad en los cálculos) que tomamos como referencia. De la misma forma, todo punto del espacio queda determinado unívocamente mediante su distancia a tres rectas fijas respectivamente perpendiculares entre sí. A este sistema de referencia lo denominamos **sistema de coordenadas cartesianas ortogonales** de origen O y ejes x, y, z.

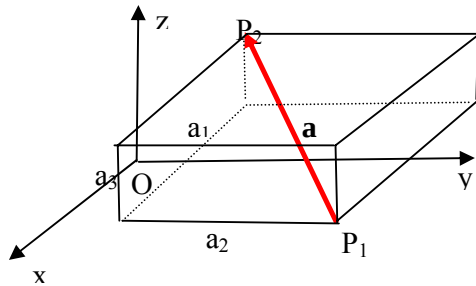


Figura 3

$P_1 (x_1, y_1, z_1)$ y $P_2 (x_2, y_2, z_2)$ son respectivamente el origen y el extremo del vector $\mathbf{a}$.

Definición 4: Se denominan **componentes** de un vector $\mathbf{a}$ respecto del sistema $(O; x, y, z)$ a las proyecciones de $\mathbf{a}$ sobre los ejes, o sea a los números

$$a_1 = x_2 - x_1 \quad a_2 = y_2 - y_1 \quad a_3 = z_2 - z_1$$

En general, pondremos $\mathbf{a} (a_1, a_2, a_3)$ para indicar que a_1, a_2 y a_3 son las componentes del vector $\mathbf{a}$. Estas componentes pueden ser números positivos o negativos (más adelante veremos que pueden ser funciones de una o más variables), pero siempre deben ser calculadas como diferencia entre las coordenadas del extremo y las del origen del vector. Así, por ejemplo, **dos vectores opuestos** (de igual módulo y dirección pero de sentidos opuestos) tienen sus componentes iguales en valor absoluto pero de signos contrarios.

Como consecuencia de la definición anterior y de la definición general de igualdad de vectores se deduce que **dos vectores iguales tienen las mismas componentes en cualquier sistema de coordenadas**. Es más, los vectores y los resultados de las operaciones entre ellos tienen un significado intrínseco, independiente de cualquier sistema de coordenadas que por conveniencia se haya introducido en el espacio. Esta es la propiedad esencial del cálculo vectorial y lo que lo transforma en una herramienta tan potente.

Dado que el vector es la diagonal del paralelepípedo de figura 3, cuyas aristas son a_1, a_2 y a_3 , el módulo del vector $\mathbf{a}$ es

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Adición y sustracción de vectores

Para sumar dos vectores **a** y **b** se procede de la siguiente manera: a partir del extremo de **a** se lleva el vector **b**; el vector cuyo origen es el origen de **a** y cuyo extremo es el extremo de **b**, es el **vector suma** $a + b$.

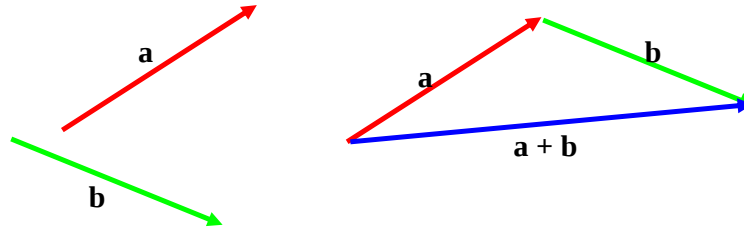


Figura 4

Al mismo resultado se llega tomando **a** y **b** con el mismo origen y definiendo la suma como la diagonal del paralelogramo construido sobre **a** y **b**, que pasa por el origen, tal como se muestra en la figura 5.

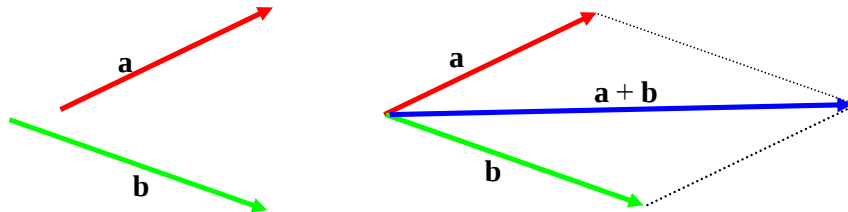


Figura 5

Dado que la suma de dos vectores **a** y **b** es otro vector **c**, las componentes del vector resultante se obtienen mediante la suma de las componentes correspondientes:

$$\vec{a}(a_1, a_2, a_3) + \vec{b}(b_1, b_2, b_3) = \vec{c}(c_1, c_2, c_3) \Rightarrow c_1 = a_1 + b_1 \quad c_2 = a_2 + b_2 \quad c_3 = a_3 + b_3$$

De esta definición se deduce que la adición de vectores es **conmutativa**: $a + b = b + a$.

El **vector opuesto** al vector $\mathbf{v}(v_1, v_2, v_3)$ se representa por $-\mathbf{v}$; tiene el mismo módulo y dirección que **v** pero sentido contrario. Sus componentes son $-v_1, -v_2, -v_3$. Es inmediato entonces que la **diferencia** $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ de dos vectores es igual a la suma del vector **u** y del vector $-\mathbf{v}$, opuesto a **v**. Por lo tanto las componentes del vector diferencia $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ son las diferencias de las componentes, o sea

$$u_1 - v_1 \quad u_2 - v_2 \quad u_3 - v_3$$

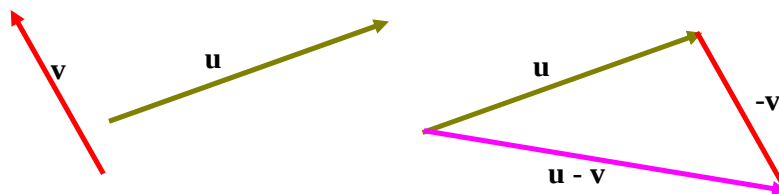


Figura 6

Geoméricamente, para sumar algebraicamente varios vectores basta llevarlos sucesivamente de manera que el origen de cada uno coincida con el extremo del precedente (figura 7).

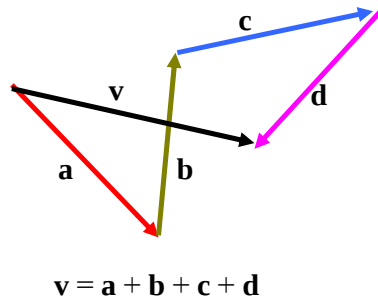


Figura 7

Analíticamente, el vector suma es el que tiene por componentes las sumas de las componentes respectivas:

$$v_i = a_i + b_i + c_i + d_i \quad i = 1, 2, 3$$

La adición de vectores cumple las propiedades conmutativa y asociativa en forma similar a la adición ordinaria entre números reales.

Los vectores pueden ser multiplicados por una magnitud escalar. Se denomina producto $\lambda \mathbf{a}$ del vector **a** por el escalar λ , al vector que tiene i) el módulo igual al producto del módulo de **a** por el valor absoluto de λ ; ii) la misma dirección que **a**; iii) el mismo sentido que **a** si λ es positivo y sentido opuesto si λ es negativo.

Las componentes del vector $\lambda \mathbf{a}$ son, por lo tanto

$$\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3$$

Ejemplo:

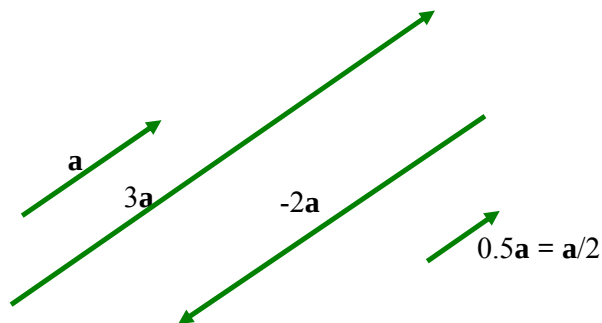


Figura 8

En la figura 8 se muestran los vectores **a**, **3a**, **-2a** y **a/2**.

Dado que a es el módulo del vector **a** ($a = |\mathbf{a}|$), en el caso en que $\lambda = 1/a$, el vector $\mathbf{a}/a$ será un vector de módulo unidad y de la misma dirección y sentido que **a**.

Definición 5: A los vectores de módulo unidad se los denomina **versores**.

A los versores se los indica comúnmente con una letra en negrita sobre la que se coloca una *v* derecha o invertida, según el autor. En el texto serán indicados en cada caso particular de forma tal que no haya lugar a dudas.

Sea $(O; x, y, z)$ un sistema de coordenadas ortogonales (figura 9). Sobre cada uno de los ejes, y con su sentido coincidente con el sentido positivo de aquellos, se han superpuestos los versores ***i***, ***j***, ***k***. Sus componentes son

$$\hat{i}(1,0,0) \quad \hat{j}(0,1,0) \quad \hat{k}(0,0,1)$$

y se denominan **versores fundamentales**.

Todo vector $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$ puede ser entonces escrito en la forma

$$\vec{a} = a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k}$$

según las reglas anteriormente establecidas para la adición de vectores y de multiplicación por un escalar.

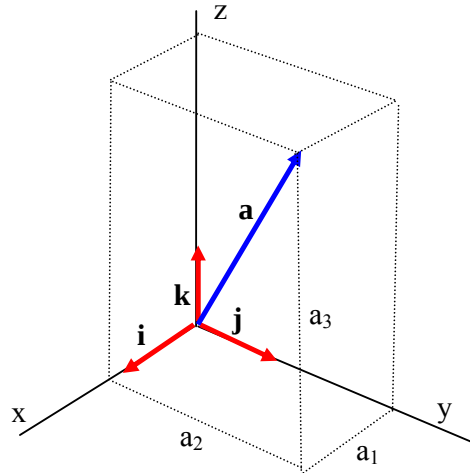


Figura 9

Esta descomposición de un vector como suma de tres vectores en la dirección de los ejes coordenados es muy importante y útil. Se denomina **descomposición canónica** de un vector.

Producto escalar y producto vectorial

Hay dos formas de multiplicar vectores entre sí: escalar o vectorialmente.

Definición 6: Se denomina **producto escalar o interno** de dos vectores **a** y **b** al escalar obtenido como producto de los módulos de los vectores por el coseno del ángulo que forman.

Indicaremos el producto escalar con un punto, de forma tal que será

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \theta$$

siendo θ el ángulo formado por los dos vectores. Como consecuencia de la definición se obtiene que:

- i) el producto escalar es conmutativo: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
- ii) la condición necesaria y suficiente para que dos vectores sean perpendiculares (formen entre sí un ángulo de 90°) es que su producto escalar sea nulo (pues $\cos 90^\circ = 0$).
- iii) mediante las componentes de los vectores **a**, **b**, el producto escalar entre ellos se expresa como:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

A esta expresión se llega a partir de la definición de producto escalar. A fin de simplificar la demostración, supongamos que los vectores **a**(a_1, a_2) y **b**(b_1, b_2) se encuentren en el plano (x, y), figura 10.

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= ab \cos \theta = ab \cos(\beta - \alpha) = \\ &= ab[\cos \beta \cdot \cos \alpha + \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \alpha] = \\ &= a \cos \beta \cdot b \cos \alpha + a \operatorname{sen} \beta \cdot b \operatorname{sen} \alpha\end{aligned}$$

Pero

$$a \cos \beta = a_1 \quad b \cos \alpha = b_1$$

$$a \operatorname{sen} \beta = a_2 \quad b \operatorname{sen} \alpha = b_2$$

Reemplazando queda

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

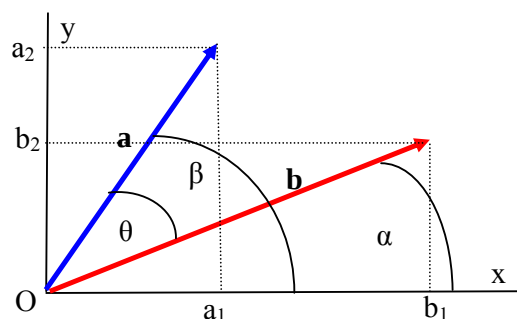


Figura 10

Queda como ejercicio para el estudiante la demostración con vectores del espacio.

De esta propiedad se deduce que:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = a_1 \cdot (b_1 + c_1) + a_2 \cdot (b_2 + c_2) + a_3 \cdot (b_3 + c_3) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

es decir

iv) el producto escalar tiene la propiedad distributiva.

Además, al multiplicar un vector por sí mismo, se obtiene: $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 = a^2$

v) para los versores fundamentales $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, de módulo unidad y perpendiculares entre sí, resulta:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$$

Las dos orientaciones del espacio

En la figura 11 se observa que no hay forma de hacer coincidir los ejes del mismo nombre de un triedro, con los del otro.

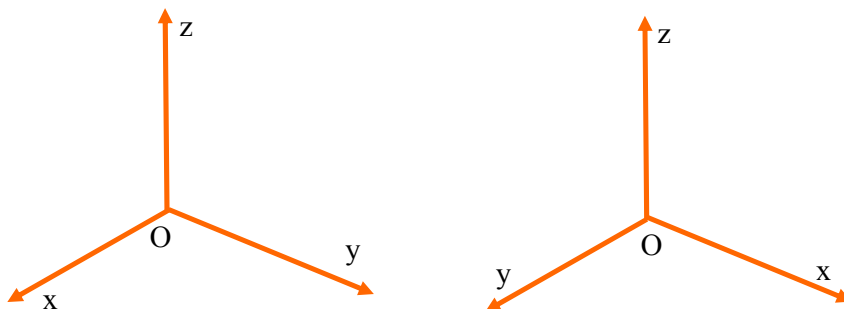


Figura 11

En efecto, si se hacen coincidir los orígenes y los ejes x, y de modo que se superpongan las partes positivas, con las partes positivas, los sentidos de los ejes z resultan opuestos. Se dice que estos triedros tienen **distinta orientación**.

Definición 7: Un triedro (O; x, y, z) es **positivo o directo** cuando colocando un tornillo (o un sacacorchos) normalmente al plano (x,y) y girando la parte positiva del eje x hacia la parte

positiva del eje y, el tornillo avanza hacia la parte positiva del eje z. En caso contrario el triedro es **negativo o inverso**.

El triedro de la izquierda en la figura 11 es positivo. El criterio indicado no es el único para reconocer si el triedro es directo o inverso, pero es uno de los más utilizados.

Producto vectorial

Supongamos al espacio orientado o sea, que se ha fijado un triedro fundamental de referencia formado por tres ejes coordenados (O; x, y, z).

Definición 8: Se llama **producto vectorial o externo** de dos vectores **a** y **b** al vector **c** que tiene:

- i) el módulo igual al producto de los módulos de a y b por el seno del ángulo que forman;
- ii) la dirección perpendicular al plano determinado por las direcciones de los vectores a, b;
- c) el sentido tal que el triedro formado por los vectores a, b, c tenga la misma orientación que el espacio.

Indicaremos al producto vectorial mediante una cruz ($\times$) o con un ángulo ($\wedge$), o sea:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{c} \quad \text{ó} \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$$

Según la definición será:

$$|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| = c = ab \sin \theta$$

La condición iii) indica que el sentido del vector **c** no pueda fijarse si no se conoce la orientación del espacio. De ahora en más tomaremos como dirección del espacio la que hemos definido como positiva tal como se muestra en figura 12.

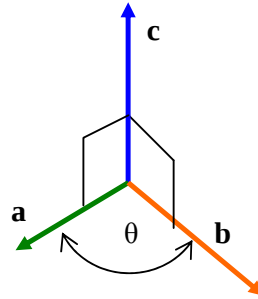


Figura 12

Propiedades del producto vectorial

i) Si en vez de $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{c}$ se tiene $\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$, el módulo y dirección del vector producto no cambian; pero el sentido deberá ahora ser tal que el triedro **b, a, c** tenga la orientación del fundamental x, y, z; por lo tanto el nuevo vector producto **c** deberá tener sentido contrario al anterior:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$$

O sea, el producto vectorial es **anticonmutativo**.

ii) siendo λ un escalar, se verifica que:

$$\lambda (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \lambda \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a} \wedge \lambda \mathbf{b}$$

iii) El producto vectorial tiene la **propiedad distributiva**, o sea:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{c} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$$

Para demostrar dicha propiedad, puede observarse que si se dividen ambos miembros de la igualdad anterior por el módulo c_0 del vector **c**, se obtiene:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c}_0 = \mathbf{a} \wedge \mathbf{c}_0 + \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}_0$$

donde $\mathbf{c}_0$ es el versor de igual dirección y sentido que **c**.

$\mathbf{a}_1$ es el vector proyección del vector $\mathbf{a}$ sobre el plano π , perpendicular al versor $\mathbf{c}_0$. Por lo tanto, es:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}_0 = \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{c}_0$$

pues, según la definición de producto vectorial, ambos miembros coinciden en dirección, sentido y módulo, dado que

$$|\mathbf{a}_1| = |\mathbf{a}| \sin \theta$$

Además, es

$$|\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}_0| = |\mathbf{a}_1|$$

Es decir, el vector $\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}_0$ es el resultado de girar $\mathbf{a}_1$ un ángulo de 90° sobre el plano normal a $\mathbf{c}_0$, de manera que $\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}_0$, $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{c}_0$ formen un triedro directo.

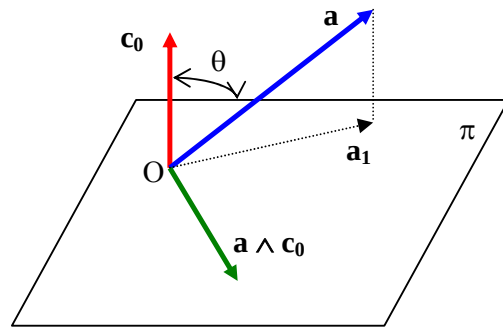


Figura 13

Consideremos ahora los dos vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y su suma $\mathbf{d} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. Proyectándolos sobre un plano normal a $\mathbf{c}_0$ tendremos los vectores $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{d}_1$ con $\mathbf{d}_1 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1$. En la figura 14 el plano de la página es el plano π perpendicular a $\mathbf{c}_0$.

Al girar los tres vectores $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{d}_1$ alrededor de O un ángulo de 90° , tendremos los vectores $\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}_0$, $\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}_0$, $\mathbf{d} \wedge \mathbf{c}_0$ y, por lo tanto:

$$\mathbf{d} \wedge \mathbf{c}_0 = \mathbf{a} \wedge \mathbf{c}_0 + \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}_0$$

Multiplicando ambos miembros por el módulo de $\mathbf{c}$ y reemplazando $\mathbf{d}$ por la suma $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ se obtiene la igualdad que queríamos demostrar.

iv) La condición necesaria y suficiente para que dos vectores tengan la misma dirección (con sentidos iguales u opuestos) es que su producto vectorial sea nulo.

En efecto, dos vectores tendrán la misma dirección cuando el ángulo que formen sea cero o π ; en estos casos el seno del ángulo es nulo y, por lo tanto, también es nulo el producto vectorial.

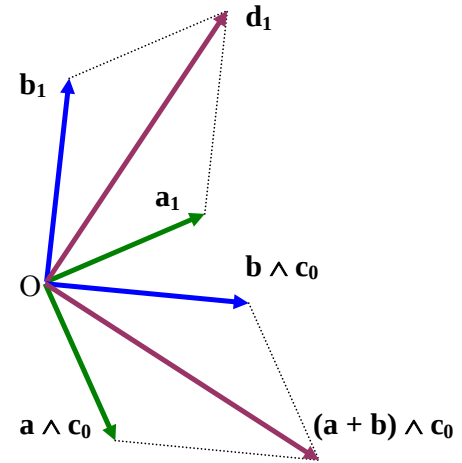


Figura 14

Componentes del producto vectorial

Sean dos vectores expresados en forma canónica, mediante los versores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ del triedro fundamental:

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k} \quad \mathbf{b} = b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}$$

Aplicando la propiedad distributiva del producto vectorial entre ellos, tendremos:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= (a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}) \wedge (b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) = \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{k} \end{aligned}$$

Este producto se puede expresar entonces como el determinante de tercer orden:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Aplicaciones del álgebra vectorial

i) **Fórmula del coseno.** Consideremos (figura 15) el triángulo formado por los vectores **a**, **b**, **c**, orientados tal como indica la figura, de manera que $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Elevando al cuadrado, o sea, multiplicando escalarmente al vector **c** por sí mismo, queda:

$$\vec{c} \cdot \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta \quad \theta = \pi - \gamma$$

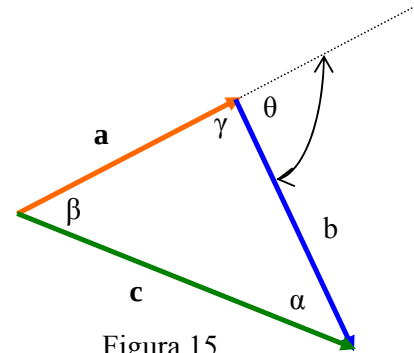


Figura 15

donde hemos introducido el ángulo θ formado por los vectores **a** y **b**. La última expresión constituye el **teorema del coseno** de la trigonometría plana.

ii) **Fórmula del seno.**

También en figura 15 se observa que:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times (\vec{c} - \vec{a}) = \vec{a} \times \vec{c}$$

Igualando los módulos del primer y tercer miembro de la igualdad, se tiene:

$$ab \sin \theta = ab \sin \gamma = ac \sin \beta$$

Tomando el segundo y tercer miembro de la igualdad se llega a:

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

De la misma forma se obtendría que esta relación es igual a $a/\sin \alpha$. Reuniendo todas las igualdades se obtiene:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

que es la **fórmula del seno** de la trigonometría plana.

